2026春季初三数学每日一题打卡008

阅读理解：在平面直角坐标系中，若函数图象上存在某点P到x轴的距离是到y轴距离的一半，则称点P为该函数的“生生点”，此函数称为“生生函数”．如点$(-4,2)$是函数$y=x^2+3x-2$图象上的点，即函数$y=x^2+3x-2$是“生生函数”，点$(-4,2)$是该函数的“生生点”．根据以上材料，完成下列问题：

(1) 已知点$A(2,-1)$、$B(4,2)$、$C(-2,11)$是二次函数$y=ax^2+bx+c$图象上的三点，其中是“生生点”的有____________，(填字母) 二次函数表达式为______；

(2) 求证：函数$y=x^2+2x+3$的图象上不存在“生生点”；

(3) 已知“生生函数”$y=|x^2-2x|+t$，存在t使得该函数恰好有四个“生生点”，直接写出t的取值范围．

试题解析：

阅读理解：在平面直角坐标系中，若函数图象上存在某点 P 到 x 轴的距离是到 y 轴距离的一半，则称点 P 为该函数的“生生点”，此函数称为“生生函数”．如点 $(-4,2)$ 是函数 $y=x^2+3x-2$ 图象上的点，即函数 $y=x^2+3x-2$ 是“生生函数”，点 $(-4,2)$ 是该函数的“生生点”．根据以上材料，完成下列问题：

(1) 已知点 $A(2,-1)$、$B(4,2)$、$C(-2,11)$ 是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 图象上的三点，其中是“生生点”的有 $\underline{A、B}$ ，(填字母) 二次函数表达式为__ $y=\dfrac{3}{4}x^2-3x+2$ __ ；

(2) 求证：函数 $y=x^2+2x+3$ 的图象上不存在“生生点”；

(3) 已知“生生函数” $y=|x^2-2x|+t$，存在 t 使得该函数恰好有四个“生生点”，直接写出 t 的取值范围．

(1) 解：根据“生生点”的定义，点 $P(x, y)$ 满足 $|y|=\dfrac{1}{2}|x|$，

在点 $A(2,-1)$ 中，$|y|=1$，$\dfrac{1}{2}|x|=1$ 满足 $|y|=\dfrac{1}{2}|x|$，∴ 点 A 是“生生点”；

在点 $B(4,2)$ 中，$|y|=2$，$\dfrac{1}{2}|x|=2$，满足 $|y|=\dfrac{1}{2}|x|$，∴ 点 B 是“生生点”；

在点 $C(-2,11)$ 中，$|y|=11$，$\dfrac{1}{2}|x|=1$，而 $|y|\neq\dfrac{1}{2}|x|$，∴ 点 C 不是“生生点”；

∵ 点 $A(2,-1)$、$B(4,2)$、$C(-2,11)$ 是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 图象上的三点，

∴ $\begin{cases}4a+2b+c=-1\\16a+4b+c=2\\4a-2b+c=11\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=\dfrac{3}{4}\\b=-3\\c=2\end{cases}$，∴ 二次函数表达式为 $y=\dfrac{3}{4}x^2-3x+2$；

故答案为：A、B，$y=\dfrac{3}{4}x^2-3x+2$；

(2) 证明：由“生生点”的定义，得 $|y|=\dfrac{1}{2}|x|$，∴ $y=\dfrac{1}{2}x$ 或 $y=-\dfrac{1}{2}x$，

当 $y=\dfrac{1}{2}x$ 时，$x^2+2x+3=\dfrac{1}{2}x$，整理得：$2x^2+3x+6=0$，

∵ $\Delta=3^2-4\times2\times6=-39<0$，

∴ 原方程没有实数根，即此时函数 $y=x^2+2x+3$ 的图象上不存在“生生点”；

当 $y=-\dfrac{1}{2}x$ 时，$x^2+2x+3=-\dfrac{1}{2}x$，整理得：$2x^2+5x+6=0$，

∵ $\Delta=5^2-4\times2\times6=-23<0$，

∴ 原方程没有实数根，即此时函数 $y=x^2+2x+3$ 的图象上不存在“生生点”；

综上，函数 $y=x^2+2x+3$ 的图象上不存在“生生点”；

(3) 解：由“生生点”的定义，得 $|y|=\dfrac{1}{2}|x|$，即 $y=\dfrac{1}{2}x$ 或 $y=-\dfrac{1}{2}x$，

当 $y=\dfrac{1}{2}x$ 时，$|x^2-2x|+t=\dfrac{1}{2}x$，

① 当 $t\geqslant0$ 时，“生生函数” $y=|x^2-2x|+t$ 的“生生点”个数 $\leqslant3$，如图 1，

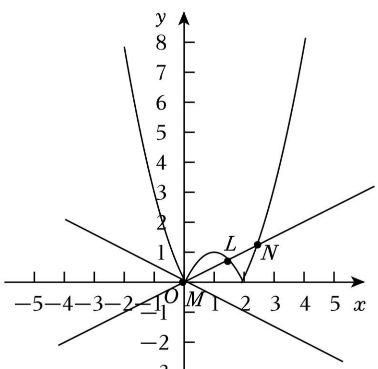


图1

②当 $-\frac{9}{16}\leqslant t<0$ 时,"生生函数" $y=|x^2-2x|+t$ 的"生生点"个数为5或6,如图2,

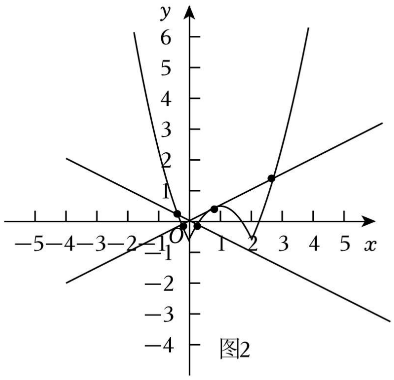


图2

③当 $-1<t<-\frac{9}{16}$ 时,"生生函数" $y=|x^2-2x|+t$ 的"生生点"个数为4,如图3,

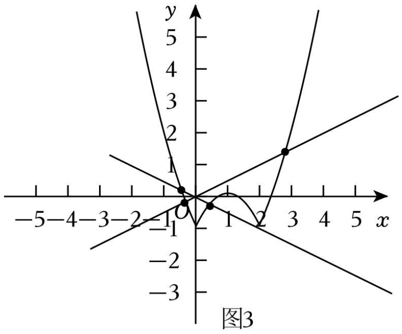
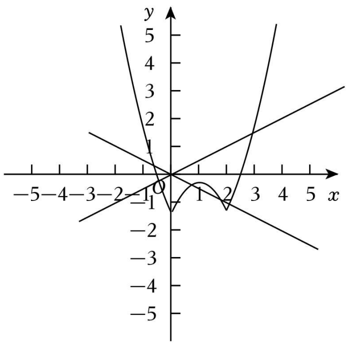


图3

④当 $-\frac{25}{16}\leqslant t\leqslant -1$ 时,"生生函数" $y=|x^2-2x|+t$ 的"生生点"个数为5或6,如图4,



⑤当 $t<-\frac{25}{16}$ 时,"生生函数" $y=|x^2-2x|+t$ 的"生生点"个数为4,如图5,

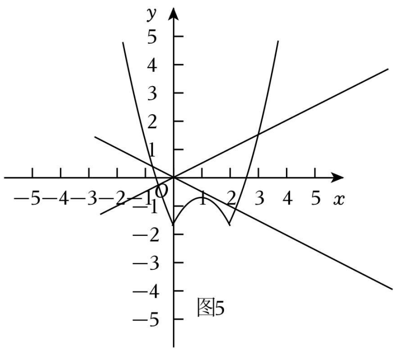


图5

综上所述,当"生生函数" $y=|x^2-2x|+t$ 恰好有四个"生生点"时, t 的取值范围为 $-1<t<-\frac{9}{16}$ 或 $t<-\frac{25}{16}$.